Suites et séries de fonctions numériques

I et J désignent des intervalles non singuliers de $\mathbb{R}$ et $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I. Suites de fonctions

1°) Définition

Déf : On appelle suite de fonctions de I vers $\mathbb{K}$ toute suite (f_n) d'éléments de $\mathcal{F}(I,\mathbb{K})$.

2°) Convergence simple

Soit (f_n) une suite de fonctions de I vers $\mathbb{K}$.

Déf : On dit que la suite de fonctions (f_n) converge simplement vers une fonction $f:I\to\mathbb{K}$ ssi $\forall t\in I, f_n(t)\to f(t)$.

La fonction f qui est alors unique est appelée limite simple de la suite (f_n) et on note, $f=\lim\limits_{n\to\infty} f_n$, $f_n \xrightarrow{CS} f$ ou $f_n \xrightarrow[I]{CS} f$.

Prop : Si $f_n \xrightarrow[I]{CS} f$ alors pour tout $J\subset I$, $f_n \xrightarrow[J]{CS} f$.

Prop : Supposons $f_n \xrightarrow[I]{CS} f$.

Si toutes les fonctions f_n sont positives alors f est positive.

Si toutes les fonctions f_n sont croissantes alors f est croissante.

3°) Convergence uniforme

Déf : Pour $f\in\mathcal{F}(I,\mathbb{K})$ bornée, on note $\|f\|_\infty=\sup\limits_{t\in I}|f(t)|$ (parfois $\|f\|_{\infty,I}$ si nécessaire).

Soit (f_n) une suite de fonctions de I vers $\mathbb{K}$.

Déf : On dit qu'une suite (f_n) de fonctions converge uniformément vers f sur I ssi $\|f_n-f\|_\infty\to 0$.

On note alors $f_n \xrightarrow{CU} f$ ou $f_n \xrightarrow[I]{CU} f$.

Prop : Si $f_n \xrightarrow{CU} f$ alors $f_n \xrightarrow{CS} f$.

Prop : Si $f_n \xrightarrow[I]{CU} f$ alors pour tout $J\subset I$, $f_n \xrightarrow[J]{CU} f$.

4°) Schéma d'étude de convergence uniforme

Pour étudier la convergence uniforme de (f_n) :

1) on étudie f limite simple de la suite (f_n).

2) on étudie si $\|f_n-f\|_\infty=\sup\limits_{t\in I}|f_n(t)-f(t)|\to 0$ et pour cela on peut :

2.a) majorer $|f_n(t)-f(t)|$ par une quantité de limite nulle indépendante de t

2.b) dresser le tableau de variation de f_n-f.

5°) Approximation uniforme sur un segment d'une fonction continue

Théorème de Weierstrass : (admis)

Soit $f:[a,b]\to\mathbb{K}$. $\forall\varepsilon>0, \exists P\in\mathbb{K}[X], \|f-P\|_{\infty,[a,b]}\le\varepsilon$.

Cor : L'ensemble des fonctions polynomiales est dense dans $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{K})$ (pour la norme $\|.\|_\infty$).

Il en est a fortiori de même pour l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^k$.

Cor : Toute fonction $f:[a,b]\to\mathbb{K}$ continue est limite uniforme d'une suite de fonctions polynomiales (aussi d'une suite de fonction de classe $\mathcal{C}^k$,…)

II. Séries de fonctions

1°) Définition

Soit (f_n) une suite de fonctions de I vers $\mathbb{K}$.

Déf : On appelle série de fonctions de terme général f_n la suite de fonctions (S_n) avec $S_n : I \to \mathbb{K}$ définie par $S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k(x)$.

Cette série de fonctions est notée $\sum f_n$.

La fonction S_n est appelée somme partielle de rang n de la série de fonctions.

2°) Convergence simple

Soit $\sum f_n$ une série de fonctions de I vers $\mathbb{K}$.

Déf : On dit que la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement vers une fonction $S : I \to \mathbb{K}$, et on note $\sum f_n \xrightarrow{CS} S$ ssi la suite de ses sommes partielles (S_n) converge simplement vers S sur I i.e. : $\forall t \in I, \sum_{k=0}^{n} f_k(t) \to S(t)$.

La fonction S est qui est alors unique est appelée somme de la série de fonctions, on la note $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$.

Les fonctions $R_n = S - S_n$ définies par $R_n(t) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_n(t)$ sont appelées restes de rang n de cette série de fonctions.

Prop : La série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement ssi pour tout $t \in I$, la série numérique $\sum f_n(t)$ converge.

De plus, si tel est le cas : $\left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n\right)(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)$.

3°) Convergence uniforme

Déf : On dit qu'une série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément vers S sur I ssi la suite (S_n) de ses sommes partielles converge vers S uniformément sur I. On note $\sum f_n \xrightarrow{CU} S$.

Prop : $\sum f_n \xrightarrow{CU} S$ alors $\sum f_n \xrightarrow{CS} S$.

Prop : $\sum f_n$ CU ssi $\sum f_n$ CS et $\|R_n\|_\infty \to 0$.

4°) Convergence normale

Déf : On dit qu'une série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement sur I ssi les fonctions f_n sont bornées à partir d'un certain rang et que la série numérique $\sum \|f_n\|_{\infty,I}$ est convergente.

Théorème :

Une série normalement convergente est uniformément convergente.

De plus $\left\|\sum_{n=0}^{+\infty} f_n\right\|_\infty \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \|f_n\|_\infty$.

Déf : On note $\sum f_n \xrightarrow{CN} S$ pour signifier une convergence normale.

Pour étudier la CN d'une série de fonction $\sum f_n$ on peut :

1) majorer $|f_n(t)|$ par le terme général d'une série convergente indépendamment de t,

2) dresser le tableau de variation de f_n afin de déterminer $\|f_n\|_\infty$.

III. Limites et continuité

1°) Continuité

Théorème :

Soit (f_n) une suite de fonctions de I vers $\mathbb{K}$ et $a \in I$.

Si $f_n \xrightarrow{CU} f$ et si chaque f_n est continue en a alors f est continue en a.

Cor : La limite uniforme d'une suite de fonctions continues est continue.

Cor : Si $\sum f_n$ est une série de fonctions continues uniformément convergente alors $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est continue.

2°) Continuité par convergence uniforme localisée

Théorème :

Si (f_n) est une suite de fonctions continues convergeant uniformément vers f sur tout segment $[a,b] \subset I$ alors f est continue.

Cor : Si $\sum f_n$ est une série de fonctions continues sur I convergeant uniformément sur tout segment $[a,b] \subset I$ alors la fonction somme est continue.

3°) Théorème de la double limite

Théorème :(interversion lim-lim)

Soit (f_n) une suite de fonctions de I vers $\mathbb{K}$ et a un point de I ou une extrémité éventuellement infinie de I.

Si (f_n) converge uniformément vers une fonction f et si chaque f_n tend vers ℓ_n en a alors (ℓ_n) converge vers un certain $\ell \in \mathbb{K}$ et f tend vers ℓ en a.

Ainsi, sous réserve de convergence uniforme : $\lim\limits_{t\to a} \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(t) = \lim\limits_{n\to+\infty} \lim\limits_{t\to a} f_n(t)$

Cor : (*interversion lim-somme infinie)*

Soit $\sum f_n$ une série de fonctions de I vers $\mathbb{K}$ et a un point de I ou une extrémité éventuellement infinie de I. Si la série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément et si chaque f_n tend vers ℓ_n en a alors la série numérique $\sum \ell_n$ converge et $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)$ tend vers $\sum_{n=0}^{+\infty} \ell_n$ quand $t \to a$.

Ainsi, sous réserve de convergence uniforme : $\lim\limits_{t\to a} \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lim\limits_{t\to a} f_n(t)$.

IV. Intégration et dérivation

1°) Convergence en moyenne et en moyenne quadratique

Déf : On dit qu'une suite de fonctions (f_n) continues sur $[a,b]$ converge en moyenne (resp. en moyenne quadratique) vers une fonction f ssi $\|f_n - f\|_1 \to 0$ (resp. $\|f_n - f\|_2 \to 0$).

Ce vocabulaire se transpose aux séries de fonctions.

Théorème :

Soit (f_n) une suite de fonctions continues de $[a,b]$ vers $\mathbb{K}$ et $f \in \mathcal{C}([a,b],\mathbb{K})$.

Si $\|f_n - f\|_\infty \to 0$ alors $\|f_n - f\|_2 \to 0$.

Si $\|f_n - f\|_2 \to 0$ alors $\|f_n - f\|_1 \to 0$.

Ainsi la convergence uniforme implique la convergence quadratique qui implique elle-même la convergence en moyenne.

2°) Intégration

Théorème :(interversion limite-intégrale)

Si (f_n) est une suite de fonctions continues de $[a,b]$ vers $\mathbb{K}$ convergeant uniformément vers une

fonction $f:[a,b]\to\mathbb{K}$ alors la suite $\left(\int_a^b f_n(t)\mathrm{d}t\right)$ converge vers $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$.

Ainsi sous réserve de convergence uniforme : $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_a^b f_n(t)\mathrm{d}t=\int_a^b \lim\limits_{n\to+\infty} f(t)\mathrm{d}t$

Cor : *(interversion série-intégrale)*

Si $\sum f_n$ est une série de fonctions continues de $[a,b]$ vers $\mathbb{K}$ convergeant uniformément alors la série $\sum\int_a^b f_n(t)\mathrm{d}t$ converge et $\int_a^b\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)\mathrm{d}t=\sum_{n=0}^{+\infty}\int_a^b f_n(t)\mathrm{d}t$.

3°) Primitivation

Soit $a\in I$ et (f_n) une suite de fonctions continues de I vers $\mathbb{K}$ et F_n la primitive de f_n qui s'annule en a.

On remarque $F_n(t)=\int_a^t f_n(u)\mathrm{d}u$.

Théorème :

Si la suite de fonctions (f_n) converge uniformément sur tout segment de I vers une fonction f, alors la suite de fonctions (F_n) converge uniformément sur tout segment de I vers la primitive de f qui s'annule en a.

Cor : Si la série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément sur tout segment de I vers une fonction S, alors la série de fonctions $\sum F_n$ converge uniformément sur tout segment de I vers la primitive de S qui s'annule en a.

4°) Dérivation

Théorème :

Soit (f_n) une suite de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur I.

Si la suite (f_n) converge simplement vers une fonction f sur I

et si (f_n') converge uniformément sur tout segment de I vers une fonction g

Alors la fonction limite f est de classe $\mathcal{C}^1$ avec $f'=g$.

Ainsi $\left(\lim\limits_{n\to+\infty} f_n\right)'=\lim\limits_{n\to+\infty} f_n'$.

De plus la convergence de (f_n) vers f est uniforme sur tout segment de I.

Cor : Soit (f_n) une suite de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur I.

Si la série $\sum f_n$ converge simplement sur I et si la série $\sum f_n'$ converge uniformément sur tout segment de I alors la fonction somme de $\sum f_n$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et $\left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n\right)'=\sum_{n=0}^{+\infty} f_n'$.

5°) Dérivées d'ordre supérieur

Théorème :

Soit (f_n) une suite de fonctions de classe $\mathcal{C}^p$ sur I.

Si $(f_n),\ldots,(f_n^{(p-1)})$ convergent simplement sur I et si $(f_n^{(p)})$ converge uniformément sur tout segment de I alors la limite simple f de (f_n) est une fonction de classe $\mathcal{C}^p$ et pour tout $k\in\{0,\ldots,p\}$,

$\forall t\in I, f^{(k)}(t)=\lim\limits_{n\to+\infty} f_n^{(k)}(t)$.

Cor : Soit (f_n) une suite de fonctions de classe $\mathcal{C}^p$ sur I.

Si les séries $\sum f_n,\ldots,\sum f_n^{(p-1)}$ convergent simplement sur I et si la série $\sum f_n^{(p)}$ converge

uniformément sur tout segment de I alors $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est de classe $\mathcal{C}^p$ et pour tout $k \in \{1,\dots,p\}$:

$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n\right)^{(k)} = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n^{(k)}$.

V. Intégration sur un intervalle quelconque

1°) Théorème de convergence dominée

Théorème : (de convergence dominée).

Soit (f_n) une suite de fonctions de I vers $\mathbb{K}$

Si les f_n sont continues par morceaux et $f_n \xrightarrow{CS} f$ avec f continue par morceaux

et si $\forall n \in \mathbb{N}$, $|f_n| \leq \varphi$ avec φ intégrable indépendante de n

alors les fonctions f_n et f sont intégrables sur I et $\int_I f = \lim_{n\to+\infty} \int_I f_n$.

2°) Autres techniques

CU sur $[a,b]$ et CD ne suffisent pas toujours pour déterminer $\lim_{n\to+\infty} \int_I f_n$. On peut alors

1) procéder par comparaison
2) réexprimer l'intégrale (par changement de variable, intégration par parties, astuce,…)
3) raisonner par les ε .

3°) Intégration terme à terme d'une série de fonctions

Théorème :

Soit $\sum f_n$ une série de fonctions de I vers $\mathbb{K}$.

Si chaque fonction est continue par morceaux et $\sum f_n$ CS vers une fonction continue par morceaux

et si chaque f_n est intégrable sur I et que la série $\sum \int_I |f_n|$ converge

Alors la fonction somme $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est intégrable sur I et $\int_I \sum_{n=0}^{+\infty} f_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n$.

4°) Intégration d'une série de fonctions par les sommes partielles

CU sur $[a,b]$ et $\sum \int_I |f_n|$ CV ne résolvent pas toutes les situations. On est parfois amener à transiter par les sommes partielles :

Sous réserve d'existence $\int_I \sum_{n=0}^{N} f_n = \sum_{n=0}^{N} \int_I f_n$

Si $\sum_{n=0}^{N} \int_I f_n$ CV et si $\int_I \sum_{n=0}^{N} f_n \xrightarrow[N\to+\infty]{} \int_I \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ alors $\int_I \sum_{n=0}^{+\infty} f_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n$